

BGR-1 D-15 C
BGR-1 D-15 C Margulan Erlanovich Ismoldayev

Theory Cosmic Strings

Cover sheet

Please return this cover sheet together with all the related question sheets.

Cosmic String (55 points).

Introduction

According to our current understanding, just after the Big Bang, when the Universe was extremely hot, the electromagnetic force, the strong nuclear force as well as the weak nuclear force were unified as one Grand Unified (GUT) force.

When the Universe cooled down to $T_{GUT} = 10^{29} K$, the strong nuclear force decoupled from the electroweak force. Later, when the temperature reduced to $T_{EW} = 10^{15} K$, the weak force decoupled from the electromagnetic force. These transitions happened in a rapid succession within a small fraction of a second after the Big Bang. It is thought that these phase transitions produced a variety of peculiar objects, called vacuum defects, which may still be observed today.

This question will discuss properties of one such possible type of defect called cosmic strings and their observational effects.

Note 1. Unless otherwise stated use the laws of Newtonian Mechanics

Note 2. You will use the following constants:

- Stefan Boltzmann Constant

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}$$

- The reduced Planck constant

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

- Universal Radiation Constant

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7.5657 \times 10^{-16} J m^{-3} K^{-4}$$

- Planck Temperature

$$T_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = 1.416784 \times 10^{32} K$$

Note 3. Recall that the gravitational field \vec{g} satisfies the Gauss theorem:

$$\vec{g} \cdot \vec{A} = -4\pi G M_{in}$$

Where M_{in} is the mass enclosed by the surface A .

Part A: Gravitational Field of a Cosmic String (22 points).

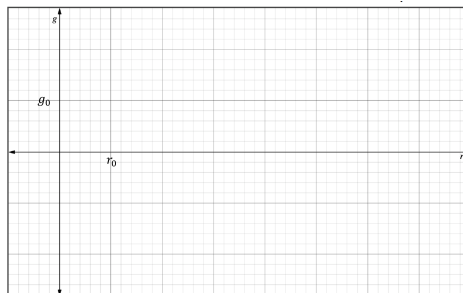
As a first approximation, let us consider a cosmic string as an infinitely long cylinder of radius r_0 and mass per unit length μ .



A.1 Write an expression in terms of the constants G , μ and r_0 for the gravitational field produced by the string, $\vec{g}(r)$. Consider the cases $r_0 < r$ and $r_0 > r$ independently 6.0pt

A.2 Write an expression in terms of the constants G , μ and r_0 for $g_0 \equiv |\vec{g}(r_0)|$. 1.0pt

A.3 Let g be defined as $\vec{g}(r) \cdot \hat{r}$. Draw a rough sketch of g vs. r in the figure given in the answer sheet 3.0pt



Theory



BGR-1 D-15 Q-3

Q15-3

English (Official)

- A.4** It is possible to define a stable orbit around a Cosmic String. For circular orbits of radius $R > r_0$ and period τ , the following relation is attained 4.0pt

$$R = A\tau^\alpha$$

where A and α are constants. Find A and α in terms of G and μ

The following three questions refers to a classical newtonian particle moving with speed v when at a distance $r > r_0$ from the string. You will need to use the result below:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

- A.5** Show that the gravitational potential energy of the particle is 3.0pt

$$U = Gm\mu \ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

where b is any fixed distance.

- A.6** What is the maximum distance, R_{\max} , from the string, that the particle can reach? 4.0pt

- A.7** Is it possible for the particle to escape the gravitational field? Write YES/NO in the answer sheet. 1.0pt

Part B: Cosmic string as a photon gas (17 points).

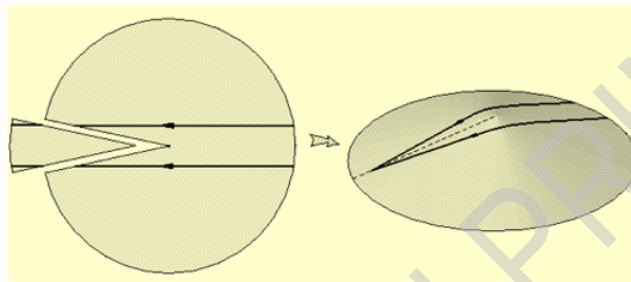
Consider now a cosmic string as a photon gas inside a very long cylinder of radius r_0 with adiabatic walls, and in thermal equilibrium at temperature T .

B.1	What is the energy density ρ of the string in terms of T , \hbar , k_B and c ?	2.0pt
B.2	<p>The radius r_0 is related to the temperature T via</p> $r_0 = \frac{\hbar^{n_1} c^{n_2}}{k_B T},$ <p>where \hbar is the reduced Planck constant, and c is the speed of light in vacuum, k_B is the Boltzmann constant, and n_1 and n_2 are integer numbers. Determine n_1 and n_2</p>	4.0pt
B.3	What is the mass per unit length, μ , of the string in terms of ρ and r_0 ?	2.0pt
B.4	<p>Express the inequality for the weak field condition, defined as</p> $\frac{2G\mu}{c^2} \ll 1,$ <p>only in terms of T and T_{pl}.</p>	5.0pt
B.5	<p>Calculate $\frac{2G\mu}{c^2}$ for</p> <ul style="list-style-type: none"> • $T = T_{EW}$ • $T = T_{GUT}$ 	3.0pt
B.6	<p>Does the weak field condition hold for T_{EW}? Answer YES or NOT. Does the weak field condition hold for T_{GUT}? Answer YES or NOT.</p>	1.0pt

Part C: Gravitational Lensing from cosmic Strings (16 points).

So far, in part *A* and *B*, we have neglected the internal pressure of the photon gas inside the string. If we include it in our analysis, we need to consider the General Theory of Relativity.

After solving the Einstein field equations, one finds that the spacetime around a cosmic string is conical as if a narrow wedge were removed from a flat sheet and the edges connected, as shown below.



http://www.ctc.cam.ac.uk/outreach/origins/cosmic_structures_five.php

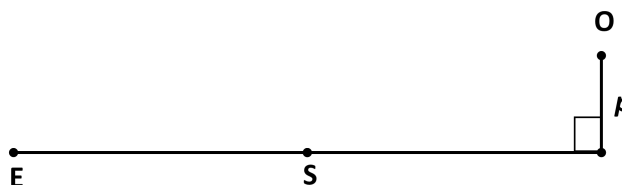
A remarkable result of this model is light deflection by a cosmic string, which leads to the possibility of detection through gravitational lensing.

The angle of deflection (in radians) of a light ray coming from a distant quasar (*O* in the figure below), as the light passes close to a cosmic string (*S* in the figure below) and eventually reaching an observer on the Earth, (*E* in the figure below), is

$$\delta\phi = \frac{4\pi G\mu}{c^2}$$

and is independent of the parameter, p , as shown in the figure below:

In the figure *E* and *O* are in a plane perpendicular to the string. The distance between the observer and the string is D_{ES} and the distance between the observer and the source is D_{OE}



C.1 Although the angle of deflection does not depend on parameter p , an Earth-based observer will be able to see more than one image only if the value of p is within a certain range. Find a condition on the value of the parameter p in terms of D_{ES} , D_{OE} , and temperature T , for an Earth-based observer to see more than one image of the object *O* 6.0pt

C.2 In case the observer sees more than one image, what is the angular separation between each pair? Find an expression in terms of D_{ES} , D_{OE} and $\delta\phi$ 6.0pt

Theory



BGR-1 D-15 Q-6

Q15-6

English (Official)

- C.3** If $D_{OE} = 2D_{ES}$, determine the minimum size of an optical telescope needed to resolve this lensing event produced by GUT string. 4.0pt

DELEGATION PRINT

Космическа струна (55 точки).

Въведение

Според сегашните разбирания, точно след Големия взрив, когато Вселената е била изключително гореща, електромагнитното взаимодействие, силното и слабото ядрено взаимодействие са били обединени като една Велика обединена сила (GUT).

Когато Вселената се е охладила до $T_{GUT} = 10^{29} K$, силното ядрена сила се е отделила от електро-слабото взаимодействие. По-късно, когато температурата е спаднала до $T_{EW} = 10^{15} K$, слабото взаимодействие се отделя от електромагнитното. Тези промени се случват в много бърза последователност, в рамките на малка част от секундата след Големия взрив. Все пак, се счита, че тези фазови преходи произвеждат голямо разнообразие от необичайни обекти, наречени дефекти на вакуума, които могат да се наблюдават от до днес.

В тази задача ще се дискутират свойствата на един такъв тип възможно дефекти, наречени космически струни и техните наблюдателни ефекти.

Бележка 1. Въпреки, че в задаата се споменават друго, използвайте Нютоновата механика

Бележка 2. Използвайте следните константи:

- Константа на Стефан-Болцман

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}$$

- Редуцираната константа на Планк

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

- Универсалната константа на лъчение

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7.5657 \times 10^{-16} J m^{-3} K^{-4}$$

- Константа на Планк

$$T_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = 1.416784 \times 10^{32} K$$

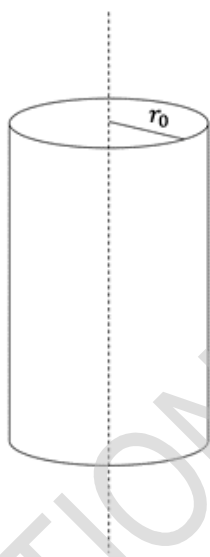
Бележка 3. Припомняме, че за гравитационното поле е \vec{g} е валидна теоремата на Гаус:

$$\vec{g} \cdot \vec{A} = -4\pi G M_{in}$$

където M_{in} е затворена в повърхността A .

Част А: Гравитационно поле на космически струни (22 точки).

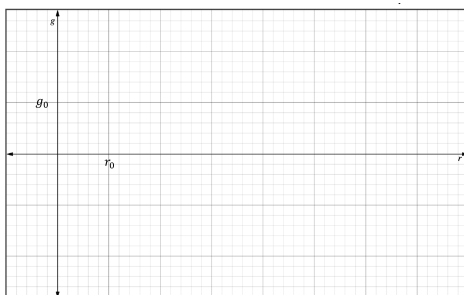
Като първо приближение, нека да разгледаме една космическа струна като безкрайно дълъг цилиндър с радиус r_0 и маса на единица дължина μ .



A.1 Запишете израз с константите G , μ и r_0 за гравитационното поле на струната, $\vec{g}(r)$.
Разгледайте случаите 6.0pt

A.2 $g_0 \equiv |\vec{g}(r_0)|$ 1.0pt

A.3 Начертайте приблизително графика на $\vec{g}(r)$ като функция на r на фигурата, която е дадено в листа за отговори. 3.0pt



- A.4** Възможно е да дефинираме стабилна орбита околко една космическа струна. За кръгова орбита с радиус $R > r_0$ и орбитален период τ , Следната зависимост може да бъде изведена: 4.0pt

$$R = A \tau^\alpha$$

където A и α са константи. Намерете A и α като функция на G и μ .

Следващите три въпроса се отнасят за класическа нютонова частица, движеща се със скорост v , когато се намира на разстояние $r > r_0$ от струната. Вие трябва да използвате резултата, по-долу:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

- A.5** Покажете, че гравитационната потенциална енергия на частицата е: 3.0pt

$$U = Gm\mu \ln(R) + u$$

където u е константа.

- A.6** Какво е максималното разстояние, R_{\max} , от струната, което частицата може да достигне? 4.0pt

- A.7** Възможно ли е частицата да напусне гравитационното поле? Запишете YES/NO в листа за отговори. 1.0pt

Част В: Космическа струна като фотонен газ (17 точки).

Сега разглеждаме по-подробен модел: Космическата струна е много дълъг цилиндър с радиус r_0 и проводящи стени и запълнен с фотонен газ, който е термодинамично равновесие при температура T .

B.1 Каква е плътността на енергията ρ на струната, изразена чрез T , \hbar , k_B и c ? 2.0pt

B.2 Радиусът r_0 се изразява с температурата T като 4.0pt

$$r_0 = \frac{\hbar^{n_1} c^{n_2}}{k_B T},$$

където \hbar е редуцираната константа на Планк, c е скоростта на светлината във вакуум, k_B е константата на Стефан-Болцман, а n_1 и n_2 са цели числа. Определете n_1 и n_2 .

B.3 Каква е масата на единица дължина, μ , на струната, като функция на ρ и r_0 ? 2.0pt

B.4 Изразете неравенството за условието за слабо взаимодействие: 5.0pt

$$\frac{2G\mu}{c^2} \ll 1,$$

само чрез T и T_{pl} .

B.5 Пресметнете $\frac{2G\mu}{c^2}$ за 3.0pt

$$\bullet T = T_{EW}$$

$$\bullet T = T_{GUT}$$

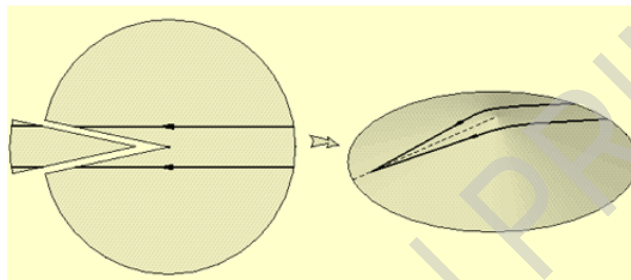
B.6 1.0pt

Does the weak field condition hold for T_{EW} ? Answer YES or NOT.
Does the weak field condition hold for T_{GUT} ? Answer YES or NOT.

Част С: Гравитационни лещи от космически струни (16 точки).

Досега, части А и В, ние пренебрегнахме вътрешното налягане на фотонния газ вътре в струната. Ако го включим в нашия анализ, трябва да използваме Общата теория на относителността.

След като се решат уравненията на полето на Айнщайн, се намира, че пространство-времето около една космическа струна е конично, сякаш, че малък отрязък от плосък лист хартия е отстранен и двата ръба са съединени, както е показано по-долу.



http://www.ctc.cam.ac.uk/outreach/origins/cosmic_structures_five.php

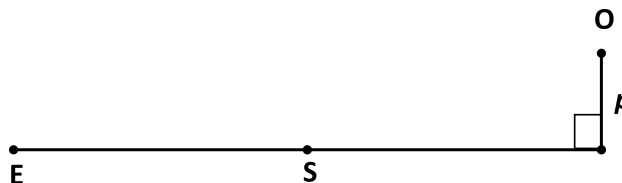
Забележителен резултат от този модел е отклонението на светлината от космическа струна, което дава възможност да тези струни да се регистрират, чрез гравитационни лещи.

Ъгълът на отклонение (в радиани) от лъч светлина, идващ от далечен квазар (O на фигурата по-долу), при преминаване на светлината близо до космическа струна (S на фигурата по-долу) и евентуално достигащ до наблюдател на Земята (E на фигурата) е:

$$\delta\phi = \frac{4\pi G\mu}{c^2}$$

и не зависи от прицелния параметър, p .

На фигурата E и O са в равнина, перпендикулярна на струната. Разстоянието между наблюдателя и струната е D_{ES} а разстоянието между наблюдателя и източника е D_{OE}



- C.1** Въпреки, че ъгълът на отклонение не зависи от прицелния параметър p , земният наблюдател ще може да вижда повече от едно изображение, само ако стойността на p е в някакви граници. Намерете при какво условие за стойността на прицелния параметър p като функция на D_{ES} , D_{OE} , и температурата T , наблюдател, който е на Земята ще вижда повече от едно изображение на източника O. 6.0pt

Theory



BGR-1 D-15 Q-6

Q15-6

Bulgarian (Bulgaria)

C.2 В Случай, че наблюдателят вижда повече от едно изображение, какво е ъгловото отстояние между всяка една двойка? Изразете го чрез D_{ES} , D_{OE} и $\delta\phi$ 6.0pt

C.3 Ако $D_{OE} = 2D_{ES}$, определете минималния размер на оптичен телескоп, с който може да бъде разрешена леща, предизвиката от GUT струна. 4.0pt

DELEGATION PRINT

Cosmic Strings (55 points).

Part A: Gravitational Field of a Cosmic String (22 points).

A.1 (6.0 pt)

$$r < r_0$$

- $\vec{g}(r) =$

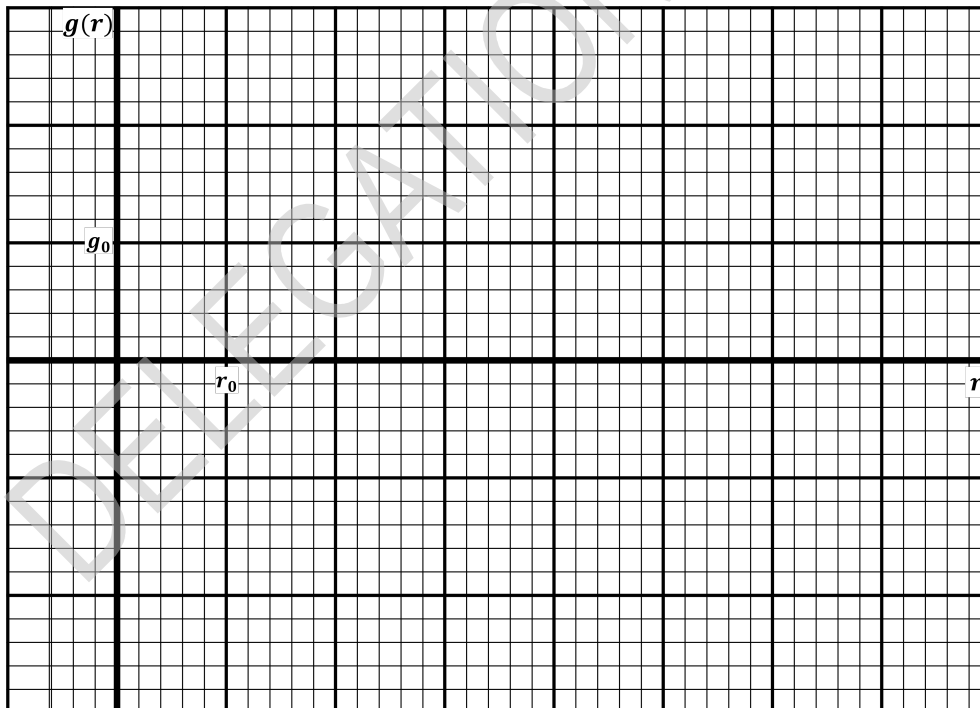
$$r > r_0$$

- $\vec{g}(r) =$

A.2 (1.0 pt)

$$g_0 =$$

A.3 (3.0 pt)



A.4 (4.0 pt)

$$A(G, \mu) =$$

$$\alpha(G, \mu) =$$

Theory



BGR-1 D-15 A-2

A15-2

English (Official)

A.5 (3.0 pt)

A.6 (4.0 pt)

$R_{max} =$

A.7 (1.0 pt)

Part B: Cosmic string as a photon gas (17 points).

B.1 (2.0 pt)

B.2 (4.0 pt)

B.3 (2.0 pt)

B.4 (5.0 pt)

B.5 (3.0 pt)

B.6 (1.0 pt)

C.1 (6.0 pt)

C.2 (6.0 pt)

C.3 (4.0 pt)

Theory



BGR-1 D-15 W-1

W15-1

DELEGATION PRINT

Theory



BGR-1 D-15 W-2

W15-2

DELEGATION PRINT

Theory



BGR-1 D-15 W-3

W15-3

DELEGATION PRINT

Theory



BGR-1 D-15 W-4

W15-4

DELEGATION PRINT

Theory



BGR-1 D-15 W-5

W15-5

DELEGATION PRINT

Theory



BGR-1 D-15 W-6

W15-6

DELEGATION PRINT

Theory



BGR-1 D-15 W-7

W15-7

DELEGATION PRINT

Theory



BGR-1 D-15 W-8

W15-8

DELEGATION PRINT